**2.1. Определения, примеры**

     Часто в результате испытания происходят события, заключающиеся в том, что некоторая величина принимает одно из своих возможных значений.  
     В таких случаях удобно вместо множества событий рассматривать одну переменную величину (называемую случайной величиной). Случайная величина обозначается через *X*, *Y*, Z, … и т.д.  
     ***Случайной*** называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.  
     **Пример.** В студенческой группе 25 человек. Пусть величина *Х* – число студентов, находящихся в аудитории перед началом занятий. Ее возможными значениями будут числа 0, 1, 2,…,25.  
     При каждом испытании (начало занятий) величина Х обязательно примет одно из своих возможных значений, т.е. наступит одно из событий *Х* = 0, *Х* = 1, …, *Х* = 25.  
     **Пример.** Измерение курса акции некоторого предприятия. Возможные события заключаются в том, что стоимость акции *Y* примет некоторое значение в пределах от 0 до ∞.  
     **Пример.** Однократное бросание игральной кости. Возможные события заключаются в том, что на верхней грани выпадает Z: 1, 2, 3, 4, 5, 6.  
     **Пример.** Подбрасывается монета *n* раз. Возможные результаты: герб выпал 0, 1, 2, …, *n* раз.  
     Различают дискретные и непрерывные случайные величины.  
     Если множество возможных значений случайной величины конечно или образуют бесконечную числовую последовательность, то такая случайная величина называется ***дискретной*** (примеры 3.1, 3.3, 3.4).  
     Случайная величина, множество значений которой заполняет сплошь некоторый числовой промежуток, называется***непрерывной*** (пример 3.2). Заметим, что дискретные и непрерывные величины не исчерпывают все типы случайных величин.  
     Если случайная величина не относится ни к дискретным, ни к непрерывным случайным величинам, то ее называют***смешанной***.  
     Очевидно, что для полной характеристики дискретной случайной величины мало знать ее значения. Необходимо им поставить в соответствие вероятности.  
     Соответствие между всеми возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется ***законом распределения*** данной случайной величины.  
     Простейшая формой задания закона распределения дискретной случайной величины является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины (обычно в порядке возрастания) и соответствующие им вероятности:

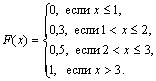
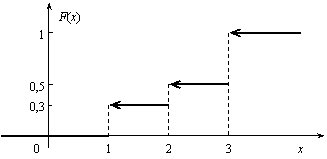
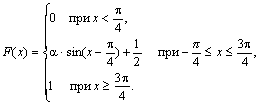
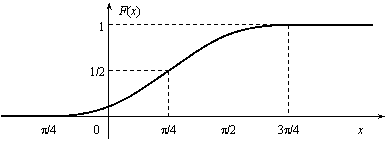
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *х*1 | *х*2 | … | *хn* | … |
| *Р* | *р*1 | *р*2 | … | *рn* | … |

     Такая таблица называется рядом распределения. Допустим, что число возможных значений случайной величины конечно: *х*1, *х*2, …, *хn*. При одном испытании случайная величина принимает одно и только одно постоянное значение. Поэтому события *Х* = *хi* (*i* = 1, 2, … , *n*) образуют полную группу попарно независимых событий. Следовательно, *р*1 +*р*2 + … + *рn* = 1.  
     Можно закон распределения изобразить и графически, откладывая на оси абсцисс возможные значения случайной величины, а на оси ординат – соответствующие вероятности. Для большей выразительности полученные точки соединяются прямолинейными отрезками. Получающая при этом фигура называется многоугольником (полигоном) распределения.

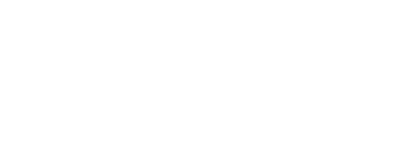
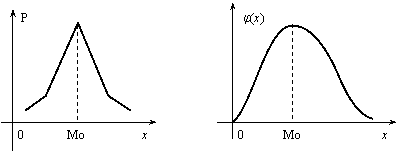
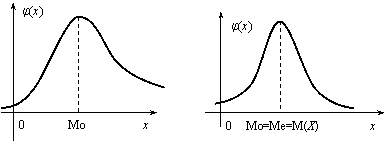
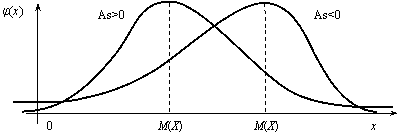
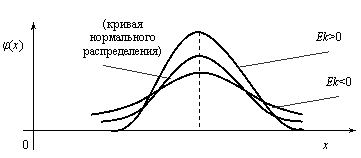
**2.2. Функция распределения вероятностей**

     Непрерывную случайную величину нельзя охарактеризовать перечнем всех возможных ее значений и их вероятностей. Естественно, встает вопрос о том, нельзя ли охарактеризовать случайную величину иным способом, одинаково годным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.  
     Функцией распределения случайной величины *Х* называют функцию *F(x*), определяющую для каждого значения *х*, вероятность того, что случайная величина *Х* примет значение меньше *х*, т.е.  
     *F(x*) = *P* (*X* <*x*).  
     Иногда функцию *F(x*) называют интегральной функцией распределения.  
     Функция распределения обладает следующими свойствами:  
     1. Значение функции распределения принадлежит отрезку [0,1]: 0 ≤ *F(x*) ≤ 1.  
     2. Функции распределения есть неубывающая функция.  
     3. Вероятность того, что случайная величина *Х* примет значение, заключенное в интервале (*а*, *b*), равна приращению функции распределения на этом интервале:   
     *Р(а* < *X* < *b*) = *F(b*) – *F(а*).                                          (2.1)  
     4. Если все возможные значения случайной величины *Х* принадлежат интервалу (*а*, *b*), то   
     *F(x*) = 0 при *х* ≤*а*; *F(x*) = 1 при *х* ≥ *b*.  
     5.      Справедливы следующие предельные отношения:  
     http://math.immf.ru/img/711.gif.  
     Для дискретной случайной величины *Х*, которая может принимать значения *х*1, *х*2, …,*хn*, функция распределения имеет вид  
     http://math.immf.ru/img/712.gif  
     где неравенство под знаком суммы означает, что суммирование касается всех тех значений *хi*, величина которых меньше *х*.  
     Поясним эту формулу исходя из определения функции *F(x*). Предположим, что аргумент х принял какое-то определенное, но такое, что выполняется неравенство *xi*<*x*≤*xi*+1. Тогда левее числа х на числовой оси окажутся только те значения случайной величины, которые имеют индекс 1, 2, 3, …, *i*. Поэтому неравенство *Х*<*x* выполняется, если величина *Х* примет значения *хк*, где *k* = 1, 2, …, *i*. Таким образом, событие *Х*<*x* наступит, если наступит любое, неважно какое, из событий *Х* = *х*1, *Х*=*х*2, *Х*=*х*3, …, *Х*=*хi*. Так как эти события несовместны, то по теореме сложения вероятностей имеем  
     http://math.immf.ru/img/713.gif.     (2.2)  
     Предположим теперь, что для непрерывной случайной величины *Х* ее функция распределения *F(x*) имеет непрерывную производную  
     *F'(x*)= φ(*x*).  
     Функцию φ(*x*) называют ***плотностью вероятности*** (для данного распределения) или дифференциальной функцией.  
     Так как плотность вероятности φ(*x*) является производной неубывающей функции *F(x*), то она неотрицательна: φ(*x*)≥0. В отличие от функции распределения, плотность вероятности может принимать сколь угодно большие значения.  
     Так как *F(x*) является первообразной для φ(*x*), то на основании формулы Ньютона-Лейбница имеем http://math.immf.ru/img/714.gif. Отсюда в силу (3.1) получаем  
     *P(a* ≤ *X* ≤ b) = http://math.immf.ru/img/715.gif.                                             (2.3)  
     Полагая *а*=–∞ и *b*=+∞, получаем достоверное событие *Х* принадлежащее (–∞, +∞), вероятность которого равна единице. Следовательно,  
     http://math.immf.ru/img/716.gif.  
     В частности, если все возможные значения случайной величины при­надлежат интервалу (*а*, *b*), то http://math.immf.ru/img/717.gif. Полагая в формуле *а* = –∞, *b* = *х* и обозначая для ясности переменную интегрирования *t*, получим функцию распределения  
     *F(x*) = *P*(– ∞ < *X* < *x*) = http://math.immf.ru/img/718.gif.  
     **Задача 2.1**. Найти интегральную функцию распределения случайной величины Х, заданной рядом распределения:

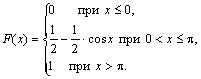
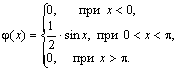
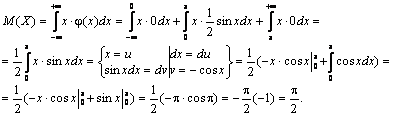
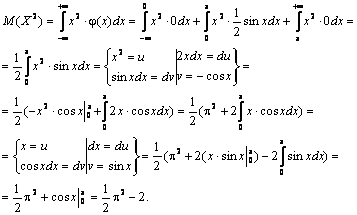
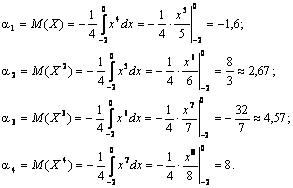
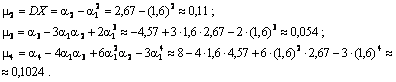
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 1 | 2 | 3 |
| *Р* | 0,3 | 0,2 | 0,5 |

и построить ее график.  
     **Решение**. Пусть  *х* ≤ 1, тогда *F(x*) = 0, так как событие *Х* < *х* будет невозможным. Если 1 < *х* ≤ 2, то на основании равенства (3.2) имеем *F(x*) = *p*1 = 0,3. Если 2 < *х* ≤ 3, то *F(x) = p*1 + *p*2 = 0,5.  
     Если *х* > 3, то *F(x) = p*1 + *p*2+ *p*3 = 1. Окончательно получаем  
       
     График функции *F(х*) изображен на рис. 3.1.  
       
     Рис. 3.1  
     **Задача 2.2**. Функция распределения случайной величины Х задана выражением  
       
     Найти коэффициент α; вероятность попадания значения случайной величины *Х* в результате опыта в интервал (π/4; 3π/4); построить график функции.  
     **Решение** . При *х*=3 π/4 функция *F*(*x* ) равна 1, т.е. α∙ sin (3π/4–π/4)+1/2=1, или α∙si n(π/2) + 1/2 = 1. Откуда α = 1/2.  
     Подставляя *а* = π/4 и *b* = 3π/4 в равенство (3.1), получаем  
     *π* (π/4 <*X*<3π/4) = F(3π/4) - F(π/4) = 1/2 × sin(π/2)+1/2–1/2 × sin 0 – 1/2 = 1/2.  
     График функции *у* =1/2∙sin(*х*-π/4 )+1/2 отличается  от графика  функции у = sin*х* тем, что он «сжат» по оси О*у* в два раза, сдвинут вправо на π/4, поднят вверх на 1/2. Воспользовавшись этим замечанием, отразим график *F(x*) (рис. 3.2).  
       
     Рис. 3.1  
     **Задача 2.3**. Средняя продолжительность срока реализации товара (в часах) имеет следующую плотность распределения:  
     φ(*х*)=http://math.immf.ru/img/723.gif  
     Вычислить:  
     а) вероятность того, что товар будет реализован позднее 150 часов;  
     б) вероятность того, что товар будет реализован позднее 200 часов и в то же время не позднее 300 часов.  
     **Решение**. а) Обозначим срок реализации товара через *Х*. Мы знаем, что *Р(Х* > 150) = 1 – *Р(Х* < 150)  и что  *Р(Х* < 150) = *F* (150). В то же время  
     http://math.immf.ru/img/724.gif.  
        
     Следовательно, *Р(Х* > 150) = 1 – http://math.immf.ru/img/725.gif.  
     б) http://math.immf.ru/img/726.gif.

**2.3. Числовые характеристики случайной величины**

     Функция распределения содержит полную информацию о случайной величине. На практике функцию распределения не всегда можно установить; иногда такого исчерпывающего знания и не требуется. Частичную информацию о случайной величине дают числовые характеристики, которые в зависимости от рода информации делятся на следующие группы.  
     1. Характеристики положения случайной величины на числовой оси (мода *Мo*, медиана *Мe*, математическое ожидание *М(Х*)).  
     2. Характеристики разброса случайной величины около среднего значения (дисперсия *D(X*), среднее квадратическое отклонение σ(*х*)).  
     3. Характеристики формы кривой *y* = φ(*x*) (асимметрия *As*, эксцесс *Ех*).  
     Рассмотрим подробнее каждую из указанных характеристик.  
     ***Математическое ожидание*** случайной величины *Х* указывает некоторое среднее значение, около которого группируются все возможные значения *Х*. Для дискретной случайной величины, которая может принимать лишь конечное число возможных значений, математическим ожиданием называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины на вероятность этих значений:  
     http://math.immf.ru/img/727.gif.                                                       (2.4)  
     Для непрерывной случайной величины *Х*, имеющей заданную плотность распределения φ(*x*) математическим ожиданием называется  следующий интеграл:  
     http://math.immf.ru/img/728.gif.                                               (2.5)  
     Здесь предполагается, что несобственный интеграл http://math.immf.ru/img/729.gif сходится абсолютно, т.е. существует.   
     Свойства математического ожидания:  
     1. *М(С*) = *C*, где *С* = *const*;  
     2. *M(C*∙*Х) = С*∙*М(Х*);  
     3. *М(Х* ± *Y) = М(Х*) ± *М(Y*), где *X* и *Y* – любые случайные величины;  
     4. *М(Х*∙*Y*)=*М(Х*)∙*М(Y*), где *X* и *Y* – независимые случайные величины.  
     Две случайные величины называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.  
     ***Модой*** дискретной случайной величины, обозначаемой *Мо*, называется ее наиболее вероятное значение (рис. 2.3), а модой непрерывной случайной величины – значение, при котором плотность вероятности максимальна (рис. 2.4).  
       
                      Рис. 2.3                                      Рис. 2.4  
     ***Медианой*** непрерывной случайной величины *Х* называется такое ее значение Ме, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше *Ме*, т.е.  
     *Р(Х* < *Ме) = Р(X* > *Ме*)  
     Из определения медианы следует, что *Р(Х*<*Ме*) = 0,5, т.е. *F* (*Ме*) = 0,5. Геометрически медиану можно истолковывать как абсциссу, в которой ордината φ(*x*) делит пополам площадь, ограниченную кривой распределения  (рис. 2.5). В случае симметричного распределения медиана совпадает с модой и математическим ожиданием (рис. 2.6).  
       
             Рис. 2.5                                       Рис. 2.6  
     ***Дисперсией*** случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания  
     *D(X*) = *M(X* –*М(Х*))2.  
     Дисперсию случайной величины *Х* удобно вычислять по формуле:  
     а) для дискретной величины  
     http://math.immf.ru/img/733.gif; (2.6)  
     б) для непрерывной случайной величины  
     http://math.immf.ru/img/734.gifj(*х*)d*x* – [M(*X*)]2.                                (2.7)  
     Дисперсия обладает следующими свойствами:  
     1. *D(C*) = 0,   где *С* = *const*;  
     2. *D(C*×*X*) = C2∙*D(X*);  
     3. *D*(*X*±*Y*) = *D*(*X*) + *D*(*Y*), если *X* и *Y* независимые случайные величины.  
     ***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины *Х* называется арифметический корень из дисперсии, т.е.   
     σ(*X*) =http://math.immf.ru/img/735.gif.  
     Заметим, что размерность σ(*х*) совпадает с размерностью самой случайной величины *Х*, поэтому среднее квадратическое отклонение более удобно для характеристики рассеяния.  
     Обобщением основных числовых характеристик случайных величин является понятие моментов случайной величины.  
     ***Начальным моментом k-го порядка*** α*k* случайной величины *Х* называется математическое ожидание величины*Хk*, т.е. α*k* = *М(Хk*).  
     Начальный момент первого порядка – это математическое ожидание случайной величины.  
     ***Центральным моментом k-го порядка***μ*k* случайной величины *Х* называется математическое ожидание величины (*Х*–*М(Х*))*k*, т.е. μ*k* = *М(Х*–*М(Х*))*k*.  
     Центральный момент второго порядка – это дисперсия случайной величины.  
     Для дискретной случайной величины начальный момент выражается суммой α*k* = http://math.immf.ru/img/736.gif, а центральный – суммой μ*k*= http://math.immf.ru/img/737.gif где *рi* = *p(X*=*xi*). Для начального и центрального моментов непрерывной случайной величины можно получить следующие равенства:  
     α*k* = http://math.immf.ru/img/738.gif,  μ*k* = http://math.immf.ru/img/739.gif,  
     где φ(*x*) – плотность распределения случайной величины Х.  
     Величина *As* = μ3 / σ3 называется ***коэффициентом асимметрии***.  
     Если коэффициент асимметрии отрицательный, то это говорит о большом влиянии на величину m3 отрицательных отклонений. В этом случае кривая распределения (рис.2.7) более полога слева от *М(Х*). Если коэффициент As положительный, а значит, преобладает влияние положительных отклонений, то кривая распределения (рис.2.7) более полога справа. Практически определяют знак асимметрии по расположению кривой распределения относительно моды (точки максимума дифференциальной функции).  
       
     Рис. 2.7  
     ***Эксцессом*** *Еk* называется величина  
     *Еk* = μ4 / σ4 – 3.  
     Можно показать, что для наиболее распространенного в природе нормального закона распределения, который будет рассматриваться в следующем параграфе, отношение μ4 / σ4 = 3. Поэтому эксцесс служит для сравнения данного распределения с нормальным, у которого эксцесс равен нулю. Можно было бы доказать, что распределения более островершинные, чем нормальное, имеют эксцесс *Еk* > 0, а более плосковершинные – имеют эксцесс *Еk* < 0 (рис.3.8).  
        
     Рис. 2.8  
     **Задача**. Дискретная случайная величина *Х*, имеющая смысл числа курьеров, задействованных для доставки корреспонденции в коммерческой организации, задана законом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *Р* | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 0,2 |

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.  
     **Решение**. Так как случайная величина является дискретной, то для вычисления *М(Х*) воспользуемся формулой (3.4). Имеем  
     *М( х) = х*1 × *р*1 + *х*2 × *р*2 + *х*3 × *р*3 + *х*4 × *р*4 = 0 × 0,4 + 1 ×0,1 + 2 × 0,3 + 3 × 0,2 = 1,3.  
     Найдем дисперсию *D(x*). Предварительно найдем математическое ожидание от *х*2:  
     *М(х*2) = *х*12 × *р*1 + *х*22 × *р*2+ *х*32 × *р*3+ *х*42 × *р*4 = 02 × 0,4 + 12 × 0,1 + 22 × 0,3 + 32 × 0,2 = 3,1.  
     Далее по формуле (3.6) получаем  
     *D(X*) = 3,1 – 1,32 = 3,1 – 1,69 = 1,41.  
     Найдем среднее квадратическое отклонение. Имеем  
     σ(х) =http://math.immf.ru/img/742.gif.  
     Таким образом, среднее число курьеров равно 1,3 со средним разбросом 1,22.  
     **Задача**. Непрерывная случайная величина *Х* задана функцией распределения  
       
     Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.  
     **Решение** . По определению дифференциальной функции φ(*х) = F* ¢ (*x* ). Отсюда       
     В точках *х* = 0 и *х* = π функция φ(*х*) не дифференцируема. По формуле (3.5) получаем  
       
     Находим сначала М(*Х*2). Имеем  
       
     Далее по формуле (3.7) получаем  
     http://math.immf.ru/img/747.gif.  
     **Задача**. Случайная величина задана функцией  
       
     Найти коэффициент асимметрии и эксцесс.  
     **Решение**. Предварительно вычислим начальные моменты до четвертого порядка. Имеем:  
       
     Теперь, воспользовавшись следующими формулами (они легко получаются из определения и свойств математического ожидания и дисперсии), найдем центральные моменты:  
       
     Отсюда следует, что http://math.immf.ru/img/751.gif.  
     Далее имеем http://math.immf.ru/img/752.gif.

**2.4. Теоретические распределения  
  
2.4.1. Биномиальное распределение**

     Пусть в каждом из *n* независимых испытаний событие *А* может произойти с одной и той же вероятностью *р*(следовательно, вероятность непоявления *q* =1 – *p*). Дискретная случайная величина *Х* – число наступлений события *А*– имеет распределение, которое называется ***биномиальным***.  
     Очевидно, событие *А* в *n* испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, …, либо *n* раз. Таким образом, возможные значения *Х* таковы: *х*1 = 0, *х*2 = 1, *х*3 = 2,…, *хn*+1 = *n*. Вероятность возможного значения *Х*= *k* (числа *k* появления события) вычисляют по формуле Бернулли:  
     *Pn(k*) = C*nk*·*pk*·*qn*–*k*,  
     где *k* = 0, 1, 2, …, *n*.  
     Ряд распределения случайной величины *Х*, подчиненной биномиальному закону, можно представить в виде следующей таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | … | k | … | n |
| *Р* | *Cn*0· *p*0·*qn* | *Cn*1 ·*p*1·*qn*–1 | … | *Cnk*·*pk*·*qn–k* | … | *Cnn*·*pn*·*q*0 |

Название закона связано с тем, что вероятности *Pn*(*k*) при *k* = 0, 1, 2, …, *n* являются членами разложения бинома Ньютона  
     (*p* + *q)n* = *qn* + *Cn*1·*p*1·*qn*–1 + … + *Cnk*·*pk*·*qn*–*k* + … +*pn*.  
     Отсюда сразу видно, что сумма всех вероятностей второй строки таблицы равна 1, так как *p* +*q* =1.  
     **Задача**. В цехе работают четыре станка. Вероятность остановки в течение часа каждого из них равна 0,8. 1) Найти закон распределения случайной величины *Х* – числа станков, остановившихся в течение часа.  2) Найти вероятность остановки в течение часа: а) более двух станков; б) от одного до трех станков.  
     **Решение**. 1) Возможные значения *Х* следующие: 0, 1, 2, 3, 4. Вероятность этих значений можно найти по формуле Бернулли, потому что *Х* имеет биномиальное распределение (станки останавливаются независимо друг от друга с постоянной вероятностью *р*=0,8). Получаем *р*4(0)=*q*4=0,0016, *р*4(1)=*C*41*p*1*q*3=0,0256, *р*4(2)=*C*42*p*2*q*2 = 0,154,*р*4(3)=*C*43 ·*p*3·*q*1=0,41, *р*4(4)= *p*4 = 0,41. Ряд распределения имеет вид

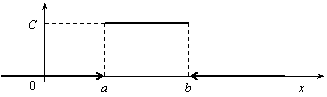
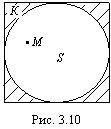
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *Р* | 0,0016 | 0,0256 | 0,154 | 0,41 | 0,41 |

2)   а) *Р(X*>2)=*P*(*X* =3)+*P*(*X*=4)=0,41+0,41=0,82.  
      б) *P*1≤*X*≤3)=*P*(*X*=1)+*P*(*X*=2)+*P*(*X*=3)=0,0256+0,154+0,41=0,59.

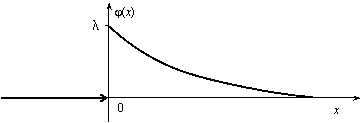
**2.4.2. Распределение Пуассона**

     Это распределение представляет собой предельный случай биномиального, когда вероятность *р* очень мала, а число испытаний *n* велико.  
     Таким образом, им можно пользоваться при описании частот распределения редких событий, таких, например, как случай обширных наводнений на протяжении долгого периода времени наблюдений.  
     Дискретная случайная величина *Х*, которая может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностями   
     http://math.immf.ru/img/753.gif,                                                       (2.8)  
     где *k* – число появления событий в *n* независимых испытаниях, λ = *n*· *p* (среднее число появлений события в *n*испытаниях), называется распределенной по **закону Пуассона** с параметром λ.  
     В отличие от биномиального распределения здесь случайная величина может принимать бесконечное множество значений, представляющее собой бесконечную последовательность целых чисел 0, 1, 2, 3, … .  
     Закон Пуассона описывает число событий *k*, происходящих за одинаковые промежутки  времени. При этом полагается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, которая характеризуется параметром λ = *n*·*p* . Так как для распределения Пуассона вероятность *р* появления события в каждом испытании мала, то это распределение называют законом распределения редких явлений.  
     По распределению Пуассона распределено, например число посетителей магазина или банка за определенный промежуток времени, при этом λ – среднее число посетителей за это время.  
     Предположим, что в среднем в магазин приходит 2,1 покупатель в минуту. Тогда, используя (3.8), получаем, например, вероятности того, что магазин посетят за минуту 1, 4 и 10 посетителей:  
     http://math.immf.ru/img/754.gif, http://math.immf.ru/img/755.gif, http://math.immf.ru/img/756.gif.  
     Основанием считать статистическое распределение пуассоновским является близость значений статистических характеристик http://math.immf.ru/img/757.gif и *S*2 (которые являются статистическими приближениями математического ожидания и дисперсии), так как для теоретического распределения Пуассона имеет место: *М(Х) = D( X*) = λ.

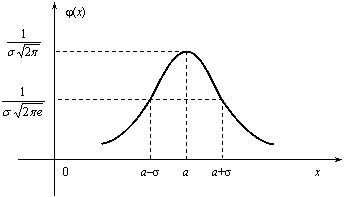
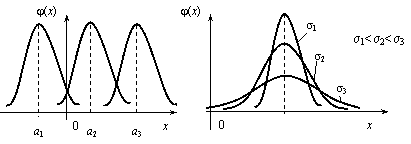
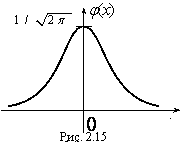
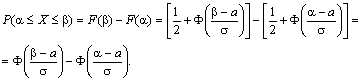
**2.4.3. Равномерное распределение**

     Непрерывная случайная величина *Х* имеет равномерное распределение на отрезке [*a*, *b*], если ее плотность имеет следующий вид:  
     http://math.immf.ru/img/758.gif  
     График плотности распределения показан на рис. 2.9.  
  
                 φ(*х*)  
       
     Рис. 2.9  
     Найдем значение постоянной *С*. Так как площадь, ограниченная кривой распределения и осью *Ох*, равна 1, то  
     http://math.immf.ru/img/760.gif,  
     откуда *С* = 1/(*b* – *a*).  
     Пусть [ α, β ] Ì [*a*,*b*]. Тогда http://math.immf.ru/img/761.gif,     т.е.  
     http://math.immf.ru/img/762.gif,                                                                         (2.9)  
     где *L*– длина (линейная мера) всего отрезка [*a*, *b*] и http://math.immf.ru/img/763.gif – длина частичного отрезка [ α, β].  
     Значения случайной величины *Х*, т.е. точки *х* отрезка [*a*,*b*], можно рассматривать как всевозможные элементарные исходы некоторого испытания. Пусть событие *А* состоит в том, что результат испытания принадлежит отрезку [ α, β] Ì [*a*, *b*]. Тогда точки отрезка [ α, β] есть благоприятные элементарные исходы события *А*.  
     Согласно формуле (2.9) имеем ***геометрическое определение вероятности***: под вероятностью события *А*понимается отношение меры http://math.immf.ru/img/763.gif множества элементарных исходов, благоприятствующих событию *А*, к мере *L* множества всех возможных элементарных исходов в предположении, что они равновозможны:  
     http://math.immf.ru/img/764.gif.  
     Это определение естественно переносит классическое определение вероятности на случай бесконечного числа элементарных исходов (случаев).  
     Аналогичное определение можно ввести также тогда, когда элементарные исходы испытания представляют собой точки плоскости или пространства.  
     **Задача**. В течение часа 0 ≤ *t* ≤ 1 (*t* – время в часах) на остановку прибывает один и только один автобус. Какова вероятность того, что пассажиру, пришедшему на эту остановку в момент времени *t* = 0, придется ожидать автобус не более 10 минут?  
     **Решение** . Здесь множество всех элементарных исходов образует отрезок [0,1], временная длина которого *L* =1, а множество благоприятных элементарных исходов составляет отрезок [0,1/6] временной длины http://math.immf.ru/img/763.gif=1/6.  
     Поэтому искомая вероятность есть   
     http://math.immf.ru/img/765.gif.  
     **Задача**. В квадрат *К* со стороной *а* с вписанным в него кругом *S* (рис. 3.10) случайно бросается материальная точка *М*. Какова вероятность того, что эта точка попадает в круг *S*?  
     **Решение** . Здесь площадь квадрата *К* = *а*2, а площадь круга http://math.immf.ru/img/767.gif .  
     За искомую вероятность естественно принять отношение  
     http://math.immf.ru/img/768.gif.  
     Эта вероятность, а следовательно, и число π, очевидно, могут быть определены экспериментально.

**2.4.4. Показательное распределение**

     Непрерывная случайная величина *Х*, функция плотности которой задается выражением  
     http://math.immf.ru/img/769.gif  
     называется случайной величиной, имеющей **показательное**, или экспоненциальное, распределение. Здесь параметр λ постоянная положительная величина.  
     Величина срока службы различных устройств и времени безотказной работы отдельных элементов этих устройств при выполнении определенных условий обычно подчиняется показательному распределению. Также этому распределению подчиняется время ожидания клиента в системе массового обслуживания (магазин, мастерская, банк, парикмахерская и т.д.). Другими словами, величина промежутка времени между появлениями двух последовательных редких событий подчиняется зачастую показательному распределению. График дифференциальной функции показательного распределения показан на рис. 2.11.  
       
     Рис. 2.11

**2.4.5. Нормальное распределение**

     Случайная величина *Х* имеет нормальное распределение (или распределение по закону Гаусса), если ее плотность вероятности имеет вид:  
     http://math.immf.ru/img/771.gif,  
     где параметры *а* – любое действительное число и σ >0.  
     График дифференциальной функции нормального распределения называют нормальной кривой (кривой Гаусса). Нормальная кривая (рис. 2.12) симметрична относительно прямой *х* =*а*, имеет максимальную ординату  http://math.immf.ru/img/772.gif, а в точках *х* = *а* ± σ – перегиб.  
               
     Рис. 2.12  
     Доказано, что параметр *а* является математическим ожиданием (также модой и медианой), а σ – средним квадратическим отклонением. Коэффициенты асимметрии и эксцесса для нормального распределения равны нулю: *As*= *Ex* = 0.  
     Установим теперь, как влияет изменение параметров *а* и σ на вид нормальной кривой. При изменении параметра *а*форма нормальной кривой не изменяется. В этом случае, если математическое ожидание (параметр *а*) уменьшилось или увеличилось, график нормальной кривой сдвигается влево или вправо (рис. 2.13).  
     При изменении параметра σ изменяется форма нормальной кривой. Если этот параметр увеличивается, то максимальное значение http://math.immf.ru/img/775.gif функции убывает, и наоборот. Так как площадь, ограниченная кривой распределения и осью *Ох*, должна быть постоянной и равной 1, то с увеличением параметра σ кривая приближается к оси *Ох* и растягивается вдоль нее, а с уменьшением σ кривая стягивается к прямой *х* = *а* (рис. 2.14).  
       
  
                  Рис. 2.13                                      Рис. 2.14  
     Функция плотности нормального распределения φ(*х*) с параметрами *а* = 0, σ = 1 называется ***плотностью стандартной нормальной случайной величины***, а ее график – стандартной кривой Гаусса.  
     Функция плотности нормальной стандартной величины определяется формулой http://math.immf.ru/img/778.gif, а ее график изображен на рис. 2.15.  
     Из свойств математического ожидания и дисперсии следует, что для величины http://math.immf.ru/img/779.gif,  *D(U*)=1,*M*(*U*) = 0. Поэтому стандартную нор мальную кривую можно рассматривать как кривую распределения случайной величины http://math.immf.ru/img/780.gif, где *Х* – случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с параметрами *а*и σ.  
     Нормальный закон распределения случайной величины в интегральной форме имеет вид  
     http://math.immf.ru/img/781.gif                                        (2.10)  
     Полагая в интеграле (3.10) http://math.immf.ru/img/782.gif, получим  
     http://math.immf.ru/img/783.gif,  
     где http://math.immf.ru/img/784.gif. Первое слагаемое равно 1/2 (половине площади криволинейной трапеции, изображенной на рис. 3.15). Второе слагаемое  
     http://math.immf.ru/img/785.gif                                                  (2.11)  
     называется ***функцией Лапласа***, а также интегралом вероятности.  
     Поскольку интеграл в формуле (2.11) не выражается через элементарные функции, для удобства расчетов составлена для *z* ≥ 0 таблица функции Лапласа. Чтобы вычислить функцию Лапласа для отрицательных значений *z*, необходимо воспользоваться нечетностью функции Лапласа:  Ф(–*z*) = – Ф(*z*). Окончательно получаем расчетную формулу  
     http://math.immf.ru/img/786.gif  
     Отсюда получаем, что для случайной величины *Х*, подчиняющейся нормальному закону, вероятность ее попадания на отрезок [ α, β] есть  
          (2.12)  
     С помощью формулы (2.12) найдем вероятность того, что модуль отклонения нормального распределения величины*Х* от ее центра распределения *а* меньше 3σ. Имеем  
     Р(|*x* – *a*| < 3 s) =P(*а*–3 s< *X*< *а*+3 s)= Ф(3) – Ф(–3) = 2Ф(3) »0,9973.  
     Значение Ф(3) получено по таблице функции Лапласа.  
     Принято считать событие ***практически достоверным***, если его вероятность близка к единице, и практически невозможным, если его вероятность близка к нулю.  
     Мы получили так называемое ***правило трех сигм***: для нормального распределения событие (|*x*–*a*| < 3σ) практически достоверно.  
     Правило трех сигм можно сформулировать иначе: хотя нормальная случайная величина распределена на всей оси *х*,***интервал ее практически возможных значений есть*(*a*–3σ,*a*+3σ)**.  
     Нормальное распределение имеет ряд свойств, делающих его одним из самых употребительных в статистике распределений.  
     Если предоставляется возможность рассматривать некоторую случайную величину как сумму достаточно большого числа других случайных величин, то данная случайная величина обычно подчиняется нормальному закону распределения. Суммируемые случайные величины могут подчиняться каким угодно распределениям, но при этом должно выполняться условие их независимости (или слабой независимости). Также ни одна из суммируемых случайных величин не должна резко отличаться от других, т.е. каждая из них должна играть в общей сумме примерно одинаковую роль и не иметь исключительно большую по сравнению с другими величинами дисперсию.  
     Этим и объясняется широкая распространенность нормального распределения. Оно возникает во всех явлениях, процессах, где рассеяния случайной изучаемой величины вызывается большим количеством случайных причин, влияние каждой из которых в отдельности на рассеяние ничтожно мало.  
     Большинство встречающихся на практике случайных величин (таких, например, как количества продаж некоторого товара, ошибка измерения; отклонение снарядов от цели по дальности или по направлению; отклонение действительных размеров деталей, обработанных на станке, от номинальных размеров и т.д.) может быть представлено как сумма большого числа независимых случайных величин, оказывающих равномерно малое влияние на рассеяние суммы. Такие случайные величины принято считать нормально распределенными. Гипотеза о нормальности подобных величин находит свое теоретическое обоснование в центральной предельной теореме и получила многочисленные практические подтверждения.  
     Представим себе, что некоторый товар реализуется в нескольких торговых точках. Из–за случайного влияния различных факторов количества продаж товара в каждой точке будут несколько различаться, но среднее всех значений будет приближаться к истинному среднему числу продаж.  
     Отклонения числа продаж в каждой торговой точке от среднего образуют симметричную кривую распределения, близкую к кривой нормального распределения. Любое систематическое влияние какого-либо фактора проявится в асимметрии распределения.  
     **Задача** . Случайная величина распределена нормально с параметрами *а* = 8, σ = 3.Найти вероятность того, что случайная величина в результате опыта примет значение, заключенной в интервале (12,5; 14).  
     **Решение**. Воспользуемся формулой (2.12). Имеем  
     http://math.immf.ru/img/788.gif  
     **Задача** . Число проданного за неделю товара определенного вида *Х* можно считать распределенной нормально. Математическое ожидание числа продаж *http://math.immf.ru/img/789.gif* тыс. шт. Среднее квадратическое отклонение этой случайной величины σ = 0,8 тыс. шт. Найти вероятность того, что за неделю будет продано от 15 до 17 тыс. шт. товара.  
     **Решение.** Случайная величина *Х* распределена нормально с параметрами *а* = М(*Х*) = 15,7; σ = 0,8. Требуется вычислить вероятность неравенства 15 ≤ *X* ≤ 17. По формуле (2.12) получаем

http://math.immf.ru/img/790.gif